第二讲

关于常见距离空间中的收敛性有如下结论:

- $\mathbb{K}^n$**中元列的收敛等价于按坐标收敛;**
- (s)**中元列的收敛等价于按坐标收敛;（35页7T）**
- $C[a,b]$**中元列的收敛等价于一致收敛;（见书上）**
- S**中元列的收敛等价于依测度收敛。**

第二讲

关于常见距离空间中的收敛性有如下结论:

- $\mathbb{K}^n$**中元列的收敛等价于按坐标收敛;**
- (s)**中元列的收敛等价于按坐标收敛;（35页7T）**
- $C[a,b]$**中元列的收敛等价于一致收敛;（见书上）**
- S**中元列的收敛等价于依测度收敛。**

证明: ■ $\Longrightarrow$ 设$x_n = \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}, x = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in (s)$，如果$d(x_n, x) \to 0$，则$\forall k \in \mathbb{N}$有

第二讲

关于常见距离空间中的收敛性有如下结论:

- $\mathbb{K}^n$**中元列的收敛等价于按坐标收敛;**
- (s)**中元列的收敛等价于按坐标收敛; （35页7T）**
- $C[a,b]$**中元列的收敛等价于一致收敛; （见书上）**
- S**中元列的收敛等价于依测度收敛。**

证明: ■ $\Longrightarrow$ 设$x_n = \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}, x = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in (s)$，如果$d(x_n, x) \to 0$，则$\forall k \in \mathbb{N}$有

$$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} \leq d(x_n, x) \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty)$$

第二讲

关于常见距离空间中的收敛性有如下结论:

- ● $\mathbb{K}^n$**中元列的收敛等价于按坐标收敛;**
- ■ (s)**中元列的收敛等价于按坐标收敛;（35页7T）**
- ● $C[a,b]$**中元列的收敛等价于一致收敛;（见书上）**
- □ S**中元列的收敛等价于依测度收敛。**

证明: ■ $\Longrightarrow$ 设$x_n = \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}, x = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in (s)$，如果$d(x_n, x) \to 0$，则$\forall k \in \mathbb{N}$有

$$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} \leq d(x_n, x) \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty)$$

由此有$a_{nk} \to a_k$ （当$n \to \infty$)，所以x_n按坐标收敛于x。

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

$$\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{当 } n > N_2$$

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

$$\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{当 } n > N_2$$

则当$n > N_2$时有

$$d(x_n,x) = \sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|}+\sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

$$\sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{当 } n > N_2$$

则当$n > N_2$时有

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} + \sum_{N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以x_n收敛于x。

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

$$\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{当 } n > N_2$$

则当$n > N_2$时有

$$d(x_n,x) = \sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} + \sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_{nk}-a_k|}{1+|a_{nk}-a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以x_n收敛于x。

$\square \Longrightarrow$ 设$x_n, x \in S$，$\forall \sigma > 0$ 记

反之，如果x_n按坐标收敛于x，对任意$\varepsilon > 0$，先取N_1使得$\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取$N_2$使得

$$\sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{当 } n > N_2$$

则当$n > N_2$时有

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} + \sum_{N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_{nk} - a_k|}{1 + |a_{nk} - a_k|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以x_n收敛于x。

$\square \Longrightarrow$ 设$x_n, x \in S$，$\forall \sigma > 0$ 记

$E_n = \{t \in E : |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}$,

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n, x) \to 0$，则由

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_{E}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq\int_{E_n}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_{E}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq\int_{E_n}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq\frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

反之，如果x_n在E上依测度收敛于x，则对$\forall\sigma>0$, 存在N使当$n>N$时有$m(E_n)<\sigma$，此时

$$d(x_n,x)$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

反之，如果x_n在E上依测度收敛于x，则对$\forall\sigma>0$, 存在N使当$n>N$时有$m(E_n)<\sigma$，此时

$$d(x_n,x)=\int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm+\int_{E\backslash E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

反之，如果x_n在E上依测度收敛于x，则对$\forall\sigma>0$, 存在N使当$n>N$时有$m(E_n)<\sigma$，此时

$$\begin{aligned} d(x_n,x) &= \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm + \int_{E\setminus E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \\ &\leq m(E_n)+\frac{\sigma}{1+\sigma}m(E) \end{aligned}$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

反之，如果x_n在E上依测度收敛于x，则对$\forall\sigma>0$, 存在N使当$n>N$时有$m(E_n)<\sigma$，此时

$$\begin{aligned} d(x_n,x) &= \int_{E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm + \int_{E\setminus E_n} \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \\ &\leq m(E_n)+\frac{\sigma}{1+\sigma}m(E)< \sigma+\sigma m(E) \end{aligned}$$

注意$\frac{t}{1+t}\uparrow$, 如果$d(x_n,x)\to 0$，则由

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq \int_{E_n}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm\geq \frac{\sigma}{1+\sigma}m(E_n)$$

有$m(E_n)\to 0$，即x_n在E上依测度收敛于x。

反之，如果x_n在E上依测度收敛于x，则对$\forall\sigma>0$,存在N使当$n>N$时有$m(E_n)<\sigma$，此时

$$\begin{aligned} d(x_n,x) &= \int_{E_n}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm+\int_{E\backslash E_n}\frac{|x_n-x|}{1+|x_n-x|}dm \\ &\leq m(E_n)+\frac{\sigma}{1+\sigma}m(E)<\sigma+\sigma m(E) \end{aligned}$$

因此，$d(x_n,x)\to 0$，即x_n收敛于x。

3. 连续性

定义 1.3. **设**$(X,d),(X_1,d_1)$**为距空，**$f:X\to X_1$**为映射，**$x_0\in X$**，如果对**$\forall\varepsilon>0$**存在**$\delta>0$, **当**$d(x,x_0)<\delta$**时有**$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$**，则称**$f$**在**$x_0$**点连续；当**$f$**在**$X$**中每一点都连续时，称**$f$**在**$X$**上连续。**

3. 连续性

定义 1.3. **设**$(X,d),(X_1,d_1)$**为距空，**$f:X\to X_1$**为映射，**$x_0\in X$**，如果对**$\forall\varepsilon>0$**存在**$\delta>0$**，当**$d(x,x_0)<\delta$**时有**$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$**，则称**$f$**在**$x_0$**点连续；当**$f$**在**$X$**中每一点都连续时，称**$f$**在**$X$**上连续。**

35页习题12：证明$d(x,A)$在X上连续，其中$A\subseteq X$。

3. 连续性

定义 1.3. 设$(X,d),(X_1,d_1)$**为距空，**$f:X\to X_1$**为映射，**$x_0\in X$**，如果对**$\forall\varepsilon>0$**存在**$\delta>0$**，当**$d(x,x_0)<\delta$**时有**$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$**，则称**$f$**在**$x_0$**点连续；当**$f$**在**$X$**中每一点都连续时，称**$f$**在**$X$**上连续。**

35页习题12：证明$d(x,A)$在X上连续，其中$A\subseteq X$。

如果$f:(X,d)\to(X_1,d_1)$满足$d_1(f(x),f(y))=d(x,y),\quad\forall x,y\in X$, 则称$f$为等距映射。

3. 连续性

定义 1.3. 设$(X,d),(X_1,d_1)$为距空，$f:X\to X_1$为映射，$x_0\in X$，如果对$\forall\varepsilon>0$存在$\delta>0$，当$d(x,x_0)<\delta$时有$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$，则称$f$在$x_0$点连续；当$f$在$X$中每一点都连续时，称$f$在$X$上连续。

35页习题12：证明$d(x,A)$在X上连续，其中$A\subseteq X$。

如果$f:(X,d)\to(X_1,d_1)$满足$d_1(f(x),f(y))=d(x,y),\quad\forall x,y\in X,$ 则称f为等距映射。

若存在(X,d)到(X_1,d_1)上的等距映射，则(X,d)和(X_1,d_1)可看作是一样的距离空间。

3. 连续性

定义 1.3. 设$(X,d),(X_1,d_1)$为距空，$f:X\to X_1$为映射，$x_0\in X$，如果对$\forall\varepsilon>0$存在$\delta>0$，当$d(x,x_0)<\delta$时有$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$，则称$f$在$x_0$点连续；当$f$在$X$中每一点都连续时，称$f$在$X$上连续。

35页习题12：证明$d(x,A)$在X上连续，其中$A\subseteq X$。

如果$f:(X,d)\to(X_1,d_1)$满足$d_1(f(x),f(y))=d(x,y)$，$\forall x,y\in X$，则称f为等距映射。

若存在(X,d)到(X_1,d_1)上的等距映射，则(X,d)和(X_1,d_1)可看作是一样的距离空间。

§2. 距离空间中的点集

1. 开集与闭集

定义 2.1. 设(X,d)为距空，$G\subseteq X$，$x_0\in X$，如果存在$r>0$使$S(x_0,r)\subseteq G$，则称x_0为G的**内点**；如果G的每个点都是G的内点，则称G为**开集**。

定义 2.1. **设**(X,d)**为距空，**$G\subseteq X$, $x_0\in X$, **如果存在**$r>0$**使**$S(x_0,r)\subseteq G$**，则称**x_0**为**G**的内点；如果**G**的每个点都是**G**的内点，则称**G**为开集。**

例 1. **开球**$S(x_0,r)$**为开集**$(r>0)$**。**

定义 2.1. **设**(X,d)**为距空，**$G\subseteq X$, $x_0\in X$, **如果存在**$r>0$**使**$S(x_0,r)\subseteq G$**，则称**x_0**为**G**的内点；如果**G**的每个点都是**G**的内点，则称**G**为开集。**

例 1. **开球**$S(x_0,r)$**为开集**$(r>0)$**。**

验：$\forall x\in S(x_0,r)$**有**$d(x,x_0)<r$,

定义 2.1. **设**(X,d)**为距空，**$G\subseteq X$**，**$x_0\in X$**，如果存在**$r>0$**使**$S(x_0,r)\subseteq G$**，则称**x_0**为**G**的内点；如果**G**的每个点都是**G**的内点，则称**G**为开集。**

例 1. **开球**$S(x_0,r)$**为开集**$(r>0)$**。**

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$，

令$r_1=r-d(x,x_0)>0$，

定义 2.1. 设(X,d)为距空，$G\subseteq X$, $x_0\in X$, 如果存在$r>0$使$S(x_0,r)\subseteq G$，则称x_0为G的**内点**；如果G的每个点都是G的内点，则称G为**开集**。

例 1. 开球$S(x_0,r)$为开集$(r>0)$。

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$,
令$r_1=r-d(x,x_0)>0$,
则对$\forall y\in S(x,r_1)$有

定义 2.1. 设(X,d)为距空，$G\subseteq X$, $x_0\in X$, 如果存在$r>0$使$S(x_0,r)\subseteq G$，则称x_0为G的**内点**；如果G的每个点都是G的内点，则称G为**开集**。

例 1. 开球$S(x_0,r)$为开集$(r>0)$。

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$,
令$r_1=r-d(x,x_0)>0$，
则对$\forall y\in S(x,r_1)$有
$d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0)<r_1+d(x,x_0)=r$，

定义 2.1. 设(X,d)为距空，$G\subseteq X$，$x_0\in X$，如果存在$r>0$使$S(x_0,r)\subseteq G$，则称x_0为G的**内点**；如果G的每个点都是G的内点，则称G为**开集**。

例 1. 开球$S(x_0,r)$为开集$(r>0)$。

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$,

令$r_1=r-d(x,x_0)>0$，

则对$\forall y\in S(x,r_1)$有

$d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0)<r_1+d(x,x_0)=r$，

所以$y\in S(x_0,r)$,

定义 2.1. **设**(X,d)**为距空，**$G\subseteq X$**，**$x_0\in X$**，如果存在**$r>0$**使**$S(x_0,r)\subseteq G$**，则称**x_0**为**G**的内点；如果**G**的每个点都是**G**的内点，则称**G**为开集。**

例 1. **开球**$S(x_0,r)$**为开集**$(r>0)$**。**

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$，

令$r_1=r-d(x,x_0)>0$，

则对$\forall y\in S(x,r_1)$有

$d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0)<r_1+d(x,x_0)=r$，

所以$y\in S(x_0,r)$，

从而$S(x,r_1)\subseteq S(x_0,r)$，

定义 2.1. **设(X,d)为距空，$G\subseteq X$，$x_0\in X$，如果存在$r>0$使$S(x_0,r)\subseteq G$，则称x_0为G的内点；如果G的每个点都是G的内点，则称G为开集。**

例 1. **开球$S(x_0,r)$为开集($r>0$)。**

验：$\forall x\in S(x_0,r)$有$d(x,x_0)<r$，
令$r_1=r-d(x,x_0)>0$，
则对$\forall y\in S(x,r_1)$有
$d(y,x_0)\leq d(y,x)+d(x,x_0)<r_1+d(x,x_0)=r$，
所以$y\in S(x_0,r)$，
从而$S(x,r_1)\subseteq S(x_0,r)$，
x为$S(x_0,r)$的内点。故$S(x_0,r)$为开集。

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. *距离空间X满足*

(1) *X和空集$\emptyset$为开集;*
(2) *任意个开集的并是开集;*
(3) *有限个开集的交是开集。*

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. *距离空间X满足*

(1) *X和空集$\emptyset$为开集;*
(2) *任意个开集的并是开集;*
(3) *有限个开集的交是开集。*

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. *距离空间X满足*

(1) *X和空集$\emptyset$为开集;*
(2) *任意个开集的并是开集;*
(3) *有限个开集的交是开集。*

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall\varepsilon > 0,\ A \cap S(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. ***距离空间X满足***

(1) ***X和空集$\emptyset$为开集;***
(2) ***任意个开集的并是开集;***
(3) ***有限个开集的交是开集。***

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall \varepsilon > 0$, $A \cap S(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

闭包$\overline{A}$：A的所有接触点组成的集合，　$A \subseteq \overline{A}$

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. *距离空间X满足*

(1) *X和空集$\emptyset$为开集;*
(2) *任意个开集的并是开集;*
(3) *有限个开集的交是开集。*

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall \varepsilon > 0,\ A \cap S(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

闭包$\overline{A}$：A的所有接触点组成的集合，　$A \subseteq \overline{A}$

当$\overline{A} = A$时，称A为闭集

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. ***距离空间X满足***

(1) ***X和空集$\emptyset$为开集;***
(2) ***任意个开集的并是开集;***
(3) ***有限个开集的交是开集。***

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall\varepsilon > 0,\ A \cap S(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

闭包$\overline{A}$：A的所有接触点组成的集合，　$A \subseteq \overline{A}$

当$\overline{A} = A$时，称A为闭集

x_0为A的极限点（聚点）：若$\forall\varepsilon > 0,\ A \cap S(x_0, \varepsilon) \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. *距离空间X满足*

(1) *X和空集$\emptyset$为开集;*
(2) *任意个开集的并是开集;*
(3) *有限个开集的交是开集。*

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall \varepsilon > 0,\ A \cap S(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

闭包$\overline{A}$：A的所有接触点组成的集合，　$A \subseteq \overline{A}$

当$\overline{A} = A$时，称A为闭集

x_0为A的极限点（聚点）：若$\forall \varepsilon > 0, A \cap S(x_0, \varepsilon) \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$

导集A'：A的所有极限点组成的集合

关于开集有如下的开集公理

定理 2.1. ***距离空间X满足***

(1) ***X和空集$\emptyset$为开集;***
(2) ***任意个开集的并是开集;***
(3) ***有限个开集的交是开集。***

记A°为A的所有开子集的并集，它等于A的所有内点组成的集合。称A°为A的内部。

x_0为A的接触点：若$\forall\varepsilon>0,\ A\cap S(x_0,\varepsilon)\neq\emptyset$

闭包$\overline{A}$：A的所有接触点组成的集合，　$A\subseteq\overline{A}$

当$\overline{A}=A$时，称A为闭集

x_0为A的极限点（聚点）：若$\forall\varepsilon>0,\ A\cap S(x_0,\varepsilon)\backslash\{x_0\}\neq\emptyset$

导集A'：A的所有极限点组成的集合

孤立点x_0：存在$\varepsilon>0$使$A\cap S(x_0,\varepsilon)=\{x_0\}$

注：

- x_0为A的接触点 $\Longleftrightarrow$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\Longleftrightarrow$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集） $\Longleftrightarrow A^c = X \backslash A$为开集（闭集）。

注:

- x_0为A的接触点 $\Longleftrightarrow$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\Longleftrightarrow$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集）$\Longleftrightarrow A^c = X\backslash A$为开集（闭集）。

仅证▲： $\Longrightarrow$ 设A闭, $\forall x \in A^c$, 有$x \notin A = \overline{A}$,

注:

- x_0为A的接触点 $\iff$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\iff$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\iff$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\iff$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集）$\iff A^c = X \backslash A$为开集（闭集）。

仅证▲： $\Longrightarrow$ 设A闭, $\forall x \in A^c$, 有$x \notin A = \overline{A}$,

所以x 不是A 的接触点,

注:

- x_0为A的接触点 $\Longleftrightarrow$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\Longleftrightarrow$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集）$\Longleftrightarrow A^c = X \backslash A$为开集（闭集）。

仅证▲： $\Longrightarrow$ 设A闭, $\forall x \in A^c$, 有$x \notin A = \overline{A}$,

所以x 不是A 的接触点,

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

注:

- x_0为A的接触点 $\iff$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\iff$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\iff$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\iff$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$，当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集）$\iff A^c = X \backslash A$为开集（闭集）。

仅证▲： $\Longrightarrow$ 设A闭, $\forall x \in A^c$, 有$x \notin A = \overline{A}$,

所以x 不是A 的接触点,

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

或$S(x, \varepsilon) \subseteq A^c$， $\therefore \quad x$为A^c的内点, A^c为开集。

注:

- x_0为A的接触点 $\Longleftrightarrow$ 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的极限点 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x_0$;
- x_0为A的孤立点 $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in A \setminus A'$;
- A为闭集 $\Longleftrightarrow$ 对任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, 当$x_n \to x$时有$x \in A$;

▲ A为闭集（开集）$\Longleftrightarrow$ $A^c = X \backslash A$为开集（闭集）。

仅证▲: $\Longrightarrow$ 设A闭, $\forall x \in A^c$, 有$x \notin A = \overline{A}$,

所以x 不是A 的接触点,

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

或$S(x, \varepsilon) \subseteq A^c$, $\therefore \quad x$为A^c的内点, A^c为开集。

$\Longleftarrow$ 设A^c为开集, $\forall x \in \overline{A}$, 若$x \notin A$, 则$x \in A^c$,

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \subseteq A^c$,

$$\exists \quad \varepsilon > 0 \text{使} S(x,\varepsilon) \subseteq A^c,$$

$$\therefore \quad S(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset,$$

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore \quad S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$,

所以x不是A的接触点，矛盾！

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x, \varepsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore \quad S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$,

所以x不是A的接触点，矛盾！

故$x \in A$。

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x,\varepsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore \quad S(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$,

所以x不是A的接触点，矛盾！

故$x \in A$。

由此得$\overline{A} \subseteq A$，可知A为闭集。

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x,\varepsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore \quad S(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$,

所以x不是A的接触点，矛盾！

故$x \in A$。

由此得$\overline{A} \subseteq A$，可知A为闭集。

闭集满足如下的闭集公理

定理 2.2. *在距离空间X中*

(1) *X和空集$\emptyset$为闭集;*

(2) *任意个闭集的交是闭集;*

(3) *有限个闭集的并是闭集。*

$\exists \quad \varepsilon > 0$使$S(x,\varepsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore \quad S(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$,

所以x不是A的接触点，矛盾！

故$x \in A$。

由此得$\overline{A} \subseteq A$，可知A为闭集。

闭集满足如下的闭集公理

定理 2.2. *在距离空间X中*

(1) *X和空集$\emptyset$为闭集;*
(2) *任意个闭集的交是闭集;*
(3) *有限个闭集的并是闭集。*

关于闭包有如下定理

定理 2.3. *(1)* $A \subseteq \overline{A}$; *(2)*$A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$; *(3)*$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; *(4)*$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

证明　(3)　$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

证明　(3)　$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

证明 (3) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$

证明 (3) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

而$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,

证明　(3)　$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$，

而$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$，

所以$z \in S(x,2\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \therefore \quad x \in \overline{A}$ 。

证明 (3) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

而$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,

所以$z \in S(x, 2\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \therefore \quad x \in \overline{A}$ 。

(4)因为$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$，后者为闭集，所以$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$；另外,

证明 (3) $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

而$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,

所以$z \in S(x, 2\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \therefore \quad x \in \overline{A}$ 。

(4)因为$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$，后者为闭集，所以$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$；另外,

$\overline{A}, \quad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。

证明　(3)　$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$?

$\forall x \in \overline{\overline{A}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad y \in S(x, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists \quad z \in S(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

而$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,

所以$z \in S(x, 2\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \therefore \quad x \in \overline{A}$。

(4)因为$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$，后者为闭集，所以$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$；另外,

$\overline{A}, \quad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。

可知等式成立。 $\square$

例 2. 闭球$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$**为闭集。**

例 2. **闭球**$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B(x_0, r)$

例 2. **闭球**$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in\overline{B(x_0,r)}, \forall\varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$,

例 2. **闭球**$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in\overline{B(x_0,r)}$, $\forall\varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$,

所以$d(y,x)<\varepsilon$, $d(y,x_0)\le r$，故

例 2. 闭球$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in\overline{B(x_0,r)}, \forall\varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$,

所以$d(y,x)<\varepsilon,\quad d(y,x_0)\le r$，故

$$d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0)<\varepsilon+r$$

例 2. **闭球**$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法　I. 仅证$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B(x_0, r)$

$\forall x \in \overline{B(x_0, r)}, \forall \varepsilon > 0$由闭包的定义存在$y \in S(x, \varepsilon) \cap B(x_0, r) \ne \emptyset$,

所以$d(y, x) < \varepsilon, \quad d(y, x_0) \le r$，故

$$d(x, x_0) \le d(x, y) + d(y, x_0) < \varepsilon + r$$

令$\varepsilon \to 0^+$得$d(x, x_0) \le r$，因此$x \in B(x_0, r)$。

例 2. **闭球**$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法　I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in\overline{B(x_0,r)}, \forall\varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$,

所以$d(y,x)<\varepsilon,\quad d(y,x_0)\le r$，故

$$d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0)<\varepsilon+r$$

令$\varepsilon\to 0^+$得$d(x,x_0)\le r$，因此$x\in B(x_0,r)$。

$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$成立。

例 2. **闭球**$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B(x_0, r)$

$\forall x \in \overline{B(x_0, r)}, \forall \varepsilon > 0$由闭包的定义存在$y \in S(x, \varepsilon) \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$,

所以$d(y, x) < \varepsilon, \quad d(y, x_0) \le r$，故

$$d(x, x_0) \le d(x, y) + d(y, x_0) < \varepsilon + r$$

令$\varepsilon \to 0^+$得$d(x, x_0) \le r$，因此$x \in B(x_0, r)$。

$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B(x_0, r)$成立。

II. 利用闭性的等价定义来证

例 2. **闭球**$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法　I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in\overline{B(x_0,r)}$, $\forall\varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$,

所以$d(y,x)<\varepsilon$,　$d(y,x_0)\le r$，故

$$d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0)<\varepsilon+r$$

令$\varepsilon\to 0^+$得$d(x,x_0)\le r$，因此$x\in B(x_0,r)$。

$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$成立。

II. 利用闭性的等价定义来证

任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B(x_0,r)$，如果$x_n\to x\in X$，

例 2. **闭球**$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$**为闭集。**

证：有两种方法 I. 仅证$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$

$\forall x\in \overline{B(x_0,r)}$, $\forall \varepsilon>0$由闭包的定义存在$y\in S(x,\varepsilon)\cap B(x_0,r)\ne\emptyset$,

所以$d(y,x)<\varepsilon$, $d(y,x_0)\le r$，故

$$d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0)<\varepsilon+r$$

令$\varepsilon\to 0^+$得$d(x,x_0)\le r$，因此$x\in B(x_0,r)$。

$\overline{B(x_0,r)}\subseteq B(x_0,r)$成立。

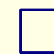
II. 利用闭性的等价定义来证

任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B(x_0,r)$，如果$x_n\to x\in X$,

则由$d(x_n,x_0)\le r$及$d(y,x_0)$关于y在X上连续有

$$d(x, x_0) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) \leq r\,,$$

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \le r,$$

所以$x \in B(x_0, r)$，故$B(x_0, r)$为闭集。 

$$d(x, x_0) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) \le r,$$

所以$x \in B(x_0, r)$，故$B(x_0, r)$为闭集。 □

例 3. **离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。**

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \le r,$$

所以$x \in B(x_0, r)$，故$B(x_0, r)$为闭集。 □

例 3. **离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。**

注：闭球$B(x_0, r)$不是开球$S(x_0, r)$的闭包$\overline{S(x_0, r)}$。

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \leq r,$$

所以$x \in B(x_0, r)$，故$B(x_0, r)$为闭集。 $\square$

例 3. 离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。

注：闭球$B(x_0, r)$不是开球$S(x_0, r)$的闭包$\overline{S(x_0, r)}$。

如离散距离空间X中$S(x_0, 1) = \{x_0\}$, $\overline{S(x_0, 1)} = \{x_0\}$, $B(x_0, 1) = X$。

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \le r,$$

所以$x \in B(x_0, r)$，故$B(x_0, r)$为闭集。 □

例 3. **离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。**

注：闭球$B(x_0, r)$不是开球$S(x_0, r)$的闭包$\overline{S(x_0, r)}$。

如离散距离空间X中$S(x_0, 1) = \{x_0\}$, $\overline{S(x_0, 1)} = \{x_0\}$, $B(x_0, 1) = X$。

2. 稠密、可分性

设$A, B \subseteq X$，如果$B \subseteq \overline{A}$，则称A稠于B;

$$d(x,x_0)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)\le r,$$

所以$x\in B(x_0,r)$，故$B(x_0,r)$为闭集。 □

例 3. **离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。**

注：闭球$B(x_0,r)$不是开球$S(x_0,r)$的闭包$\overline{S(x_0,r)}$。

如离散距离空间X中$S(x_0,1)=\{x_0\}$, $\overline{S(x_0,1)}=\{x_0\}$, $B(x_0,1)=X$。

2. 稠密、可分性

设$A,B\subseteq X$，如果$B\subseteq\overline{A}$，则称A稠于B;

如果存在最多可数集A稠于B，则称B可分;

$$d(x,x_0)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)\le r,$$

所以$x\in B(x_0,r)$，故$B(x_0,r)$为闭集。 $\square$

例 3. **离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。**

注：闭球$B(x_0,r)$不是开球$S(x_0,r)$的闭包$\overline{S(x_0,r)}$。

如离散距离空间X中$S(x_0,1)=\{x_0\}$, $\overline{S(x_0,1)}=\{x_0\}$, $B(x_0,1)=X$。

2. 稠密、可分性

设$A,B\subseteq X$，如果$B\subseteq\overline{A}$，则称A稠于B;

如果存在最多可数集A稠于B，则称B可分;

如果X存在最多可数稠子集，称X可分。

$$d(x,x_0)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)\le r,$$

所以$x\in B(x_0,r)$，故$B(x_0,r)$为闭集。 □

例 3. 离散距离空间中的每个子集都是开集也是闭集。

注：闭球$B(x_0,r)$不是开球$S(x_0,r)$的闭包$\overline{S(x_0,r)}$。

如离散距离空间X中$S(x_0,1)=\{x_0\}$, $\overline{S(x_0,1)}=\{x_0\}$, $B(x_0,1)=X$。

2. 稠密、可分性

设$A,B\subseteq X$，如果$B\subseteq\overline{A}$，则称A稠于B;

如果存在最多可数集A稠于B，则称B可分;

如果X存在最多可数稠子集，称X可分。

注：1° 若A稠于B，又B稠于C，则A稠于C。

2° A稠于$B \iff \forall x \in B, \forall \varepsilon > 0$, 存在$y \in A$使得$d(y,x) < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0,\ B \subseteq \bigcup_{x \in A} S(x,\varepsilon) \iff \forall x \in B$存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x$。

2° A稠于$B \iff \forall x \in B, \forall \varepsilon > 0,$ 存在$y \in A$使得$d(y,x) < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0,\ B \subseteq \bigcup_{x \in A} S(x,\varepsilon) \iff \forall x \in B$存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$使得$x_n \to x$。

例 4.

(1) $\mathbb{K}^n$**是可分的；（坐标为有理数的点全体为其可数稠子集）**

(2) $C[a,b]$**是可分的；（有理系数多项式组成的集合为其可数稠子集）**

(3) (s)**是可分的；（坐标为有理数且只有有限项非零的点组成的集合为其可数稠子集）**

(4) 离散距离空间X**是可分的** $\iff$ X**是最多可数集。**

2° A稠于$B \iff \forall x\in B,\forall\varepsilon>0,$ 存在$y\in A$使得$d(y,x)<\varepsilon \iff \forall\varepsilon>0,\ B\subseteq\bigcup\limits_{x\in A}S(x,\varepsilon) \iff \forall x\in B$存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$使得$x_n\to x$。

例 4.

(1) $\mathbb{K}^n$**是可分的；（坐标为有理数的点全体为其可数稠子集）**

(2) $C[a,b]$**是可分的；（有理系数多项式组成的集合为其可数稠子集）**

(3) (s)**是可分的；（坐标为有理数且只有有限项非零的点组成的集合为其可数稠子集）**

(4) 离散距离空间X**是可分的**$\iff$ X**是最多可数集。**

如果存在不可数集$A\subseteq X$及$r>0$使$\forall x,y\in A,\quad x\neq y,$ 总有$d(x,y)\geq r,$ 则X不可分。

因为若X可分，则存在最多可数集C使得$A \subseteq X \subseteq \bigcup_{x \in C} S(x, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0, \implies$ 至少存在一个$x \in C$使$S(x, \varepsilon)$含有A的两个点以上，设$u, v \in A \cap S(x, \varepsilon)$，则$r \le d(u, v) \le d(u, x) + d(x, v) < 2\varepsilon$，这当$0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$时是矛盾的！

§3. 完备性

定义 3.1. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$**，**$\forall\varepsilon > 0, \exists N$**，当**$n, m > N$**时**$d(x_n, x_m) < \varepsilon$**，则称**$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$**为Cauchy列，如果**$X$**中的任意Cauchy列均收敛，则称**$X$**是完备的。**

收敛点列都是Cauchy列；完备空间的闭子空间也是完备的。

$\mathbb{K}^n$是完备的。

例 1. $C[a, b]$**是完备的。**

验：设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$C[a, b]$中任一Cauchy列，则$\forall t \in [a, b]$有

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq d(x_n, x_m) \to 0 \quad (\text{当} n, m \to \infty)$$

知$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$为Cauchy数列,记$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \quad \forall t \in [a,b]$。因为$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n, m > N$时$\forall t \in [a,b]$有

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

令$m \to \infty$得

$$(3.1) \qquad |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall n > N$$

所以函数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$上一致收敛于x。可知x在$[a,b]$上连续,$x \in C[a,b]$，同时由(3.1)式还有

$$d(x_n, x) \le \varepsilon, \quad \forall n > N$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x，故$C[a,b]$完备。

例 2. 任何离散距离空间均是完备的。其中Cauchy列有何特点?